

7 класс. Решения задач

1. Миша задумал два натуральных числа, отличающихся на единицу. Они оба больше 20, но меньше 30, а их наименьшее общее кратное, умноженное на 4, больше 2000 и меньше 2200. Чему может равняться их наименьшее общее кратное, умноженное на 4? Ответ нужно обосновать.

ОТВЕТ: 2024.

РЕШЕНИЕ.

Натуральные числа отличаются на единицу, а значит, они взаимно просты. Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению. Получаем по условию, что произведение этих чисел, умноженное на 4, больше 2000 и меньше 2200. Посчитаем все возможные варианты:

$$4 \cdot 21 \cdot 22 = 1848 < 2000,$$

$$4 \cdot 22 \cdot 23 = 2024 \text{ — подходит,}$$

$$4 \cdot 23 \cdot 24 = 2208 > 2200.$$

Все последующие варианты будут больше 2200.

2. Матвей загадал Никите прямоугольник и сказал, что сумма каких-то двух его сторон равна 8 см, а сумма трёх его сторон равна 10 см. Никите нужно найти периметр. Чему он может быть равен? Надо привести все варианты и доказать, что других нет.

ОТВЕТ: 12 см, 14 см или 16 см.

РЕШЕНИЕ. Пусть есть первая и вторая сторона прямоугольника, у которых есть общая вершина. Будем считать без ограничения общности, что под суммой трёх сторон подразумевается сумма двух первых и второй. Под суммой двух сторон может иметься в виду сумма двух первых, двух вторых и первой со второй. Рассмотрим каждый случай в отдельности. Если сумма двух первых равна 8 см, тогда первая равна 4 см, вторая равна 2 см, а периметр 12 см. Если сумма двух вторых равна 8 см, то вторая равна 4 см, а первая из того, что сумма двух первых и второй равна 10, равна 3 см, периметр равен 14 см. Если же сумма первой и второй равна 8 см, то сумму двух первых и одной второй можно представить как сумму первой и второй плюс ещё вторая, а значит, вторая будет равна $10 - 8 = 2$ см, отсюда первая равна 6 см, а периметр — 16 см.

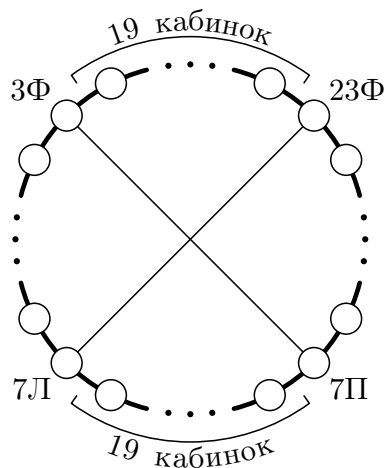
3. Дима записал несколько различных чисел в порядке возрастания, потом каждую цифру заменил буквой и то, что получилось, записал в блокнот. В итоге запись выглядела следующим образом: УМ, МЕ, МУ, НЕ, ХО, ХЕ, ОЙ. Докажите, что Дима что-то перепутал. (Различные цифры заменяются разными буквами, а одинаковые — одинаковыми.)

РЕШЕНИЕ. Если посмотреть на пятое и шестое числа, видно, что $O < E$, а если на второе и третье — что $E < Y$. Значит, $O < Y$. Но самое маленькое число начинается с Y , самое большое — с O , так что $O > Y$. Значит, у Димы какая-то ошибка.

4. Сто кабинок колеса обозрения расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в лососёвый, персиковый цвета и цвет фуксии. Кабинки одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Персиковая кабинка №7 противоположна кабинке цвета фуксии №3, а лососёвая №7 — кабинке цвета фуксии №23. Найдите, сколько на колесе обозрения кабинок лососёвых, персиковых и цвета фуксии.

ОТВЕТ. 34 лососёвых, 20 персиковых и 46 цвета фуксии

РЕШЕНИЕ. Между 3-й и 23-й кабинками цвета фуксии расположено 19 кабинок, значит, между 7-й персиковой и 7-й лососёвой кабинками их столько же. Это первые шесть лососёвых кабинок, стало быть, есть всего $19 - 6 = 13$ персиковых кабинок с номерами, большими 7. Отсюда находим, что персиковых кабинок всего $7 + 13 = 20$.



Проходя полкруга по часовой стрелке от 3-й кабинки цвета фуксии к 7-й персиковой кабинке, мы минуем (не считая этих двух) $(100 - 2) : 2 = 49$ кабинок. Шесть из них персиковые, а остальные $49 - 6 = 43$ — цвета фуксии. Поэтому всего кабинок цвета фуксии $3 + 43 = 46$. Количество лососёвых кабинок равно $100 - 20 - 46 = 34$.

5. Детсадовцы, школьники и студенты встали в круг. Когда преподаватель попросил поднять руку детсадовцев, рядом с которыми стоит студент, руку подняли 20 человек. А когда он попросил поднять руку школьников, рядом с которыми стоит студент, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два студента.

РЕШЕНИЕ. Назовём группой студентов несколько студентов (возможно, одного), стоящих подряд, слева и справа от которых стоят не студенты. Тогда подняли руки люди, соседние с группой студентов. При этом если нет детсадовца или школьника, рядом с которым стоит два студента, то люди, поднявшие руки, разбиваются на пары, а подняли руки 45 человек. Противоречие.

8 класс. Решения задач

1. Алина и Саша загадали по числу, потом они сообщили их друг другу и каждая вычла из своего загаданного половину меньшего, получилось, что меньшая разность в три раза меньше большей. Эту информацию они сообщили Яне. Ей нужно выяснить, во сколько раз большее число больше меньшего. Помогите Яне!

ОТВЕТ. В два раза.

РЕШЕНИЕ. Пусть b — большее число, а a — меньшее, по условию $b - \frac{a}{2} = 3 \left(a - \frac{a}{2} \right)$. Раскроем скобки, слагаемые с a перенесём вправо; $b = 3a - \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}$. Получаем, что $b = 2a$, то есть больше больше меньшего в два раза.

2. Найдите наименьшее трёхзначное число, которое при сложении с трёхзначным числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, даёт число, все цифры которого нечётны.

ОТВЕТ: 209.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\overline{abc}$ — искомое число, тогда $\overline{abc} + \overline{cba}$ — число, все цифры которого нечётны. Заметим, что сумма последних цифр должна быть нечётна ($a + c$ оканчивается на нечётную цифру), то есть эти цифры разной чётности. Сумма $b + b$ чётна и меньше 10, так как если бы случался перенос в следующий разряд, сумма $a + c + 1$ была бы чётна, а тогда в сумме была бы чётная цифра. Чтобы цифра в разряде десятков суммы была нечётной $a + c$ должно быть больше 10. Получается, что наименьшее возможное a — это 2, а c тогда равно 9. Наименьшим возможным b будет 0. Отсюда наименьшее трёхзначное, подходящее под условие задачи, — 209.

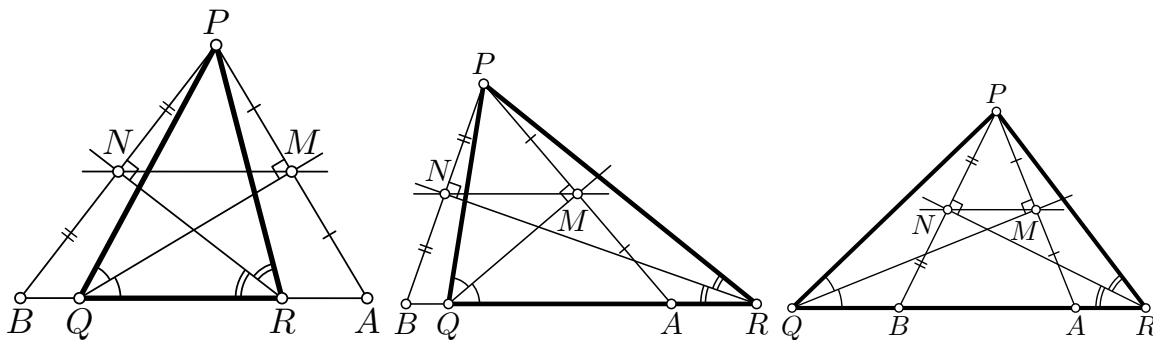
3. Из вершины P треугольника PQR проведены перпендикуляры PM и PN к биссектрисам углов этого треугольника при вершинах Q и R соответственно.

(а) Докажите, что отрезок MN параллелен стороне QR треугольника PQR .

(б) Вычислите длину отрезка MN , если $QR = p$, $PR = q$, $PQ = r$.

ОТВЕТ: (б) $\frac{q + r - p}{2}$

РЕШЕНИЕ. (а) Продолжим PM и PN до пересечения с прямой QR в точках A и B соответственно. Тогда в треугольнике PQA отрезок QM является и высотой и биссектрисой, а значит и медианой. Ещё $QP = QA$. В треугольнике PRB аналогично получим, что N — середина PB и $RP = RB$. Из вышеперечисленного MN — средняя линия $\triangle PAB$, которая параллельна QR и равна $\frac{AB}{2}$.



(б) Из пункта (а) известно, что MN — средняя линия $\triangle PAB$, которая параллельна QR , а значит, равна $\frac{AB}{2}$. Получаем:

$$AB = QA + RB - QR = PQ + PR - QR = r + q - p.$$

Отсюда находим MN .

4. Натуральные числа от 1 до 50000 выписаны в строку по порядку: 1234...4999950000. Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2024 (именно в таком порядке, подряд)?

ОТВЕТ: 37.

РЕШЕНИЕ. Один раз число 2024 встретится само по себе. Ещё оно полностью может встречаться в числах 20240, 20241, ..., 20249 как начало пятизначного числа и в числах 12024, 22024, 32024 и 42024 как конец такого числа. Всего 15 вариантов. Посчитаем, сколько раз оно встретится, будучи составленным из частей других чисел. Заметим, что не может быть такого, что предыдущее число заканчивается на 2, а следующее начинается на 024, так как число должно начинаться с ненулевой цифры.

Первый случай: предыдущее число заканчивается на 20, а следующее начинается на 24. Такое может случиться не раньше 2000. Первым местом в последовательности будет 2420, 2421. Дальше такая же ситуация произойдёт в парах вида $24 \cdot 20$, $24 \cdot 21$, где вместо точки может быть любая цифра. Тут получается 11 вариантов.

Второй случай когда 202 — конец одного числа и 4 — начало другого. Есть следующие варианты — 4202, 4203; $4 \cdot 202$, $4 \cdot 203$ (вместо точки опять любая цифра). Ещё 11 вариантов

В итоге получается 37 вариантов.

5. Саша записал натуральное число, делящееся на 17, зачеркнул в нем последнюю цифру, умножил вычеркнутую цифру на 5 и вычел произведение из получившегося после зачёркивания числа. Дима не видел ни первоначального числа, ни нового, но утверждает, что новое число также делится на 17. Прав ли Дима?

ОТВЕТ: Дима прав.

РЕШЕНИЕ. Представим число, написанное Сашей, в виде $10a + b$, где b — его последняя цифра. По условию это число делится на 17. После зачёркивания последней цифры получилось число a , а после всех произведённых действий — число $a - 5b$. Так как $a - 5b = 51a - 5(10a + b)$, а числа $51a$ и $10a + b$ кратны 17, то и полученное число делится на 17.